ESERCIZI SUGLI INTEGRALI DOPPI

Da pag. 1 a pag. 12: ESERCIZI SULLE COORDINATE CARTESIANE

Da pag. 13 a pag. 25: ESERCIZI SULLE COORDINATE POLARI

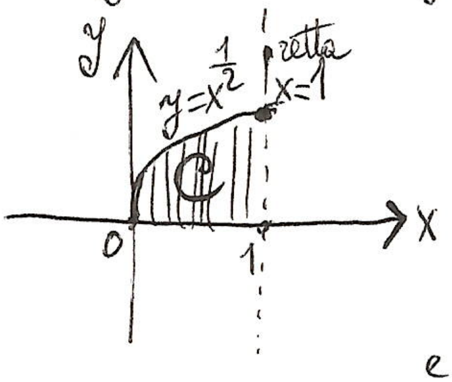
ESERCIZIO

Calcolare il seguente integrale doppio:

$$I = \iint_C x y^3 \, dx \, dy$$

dove $C \subset \mathbb{R}^2$ è il dominio del piano cartesiano delimitato dai due assi coordinati, dalla retta $x=1$ e dalla curva $y=\sqrt{x}$, cioè $y=x^{1/2}$.

Svolgimento: Disegniamo e parametrizziamo l'insieme C. Si ha:



$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^{\frac{1}{2}}\right\},$$

e quindi C è un dominio normale rispetto all'asse delle x.

Applicando la formula di riduzione e la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, si ha:

$$I = \int_0^1 x \, dx \int_0^{x^{1/2}} y^3 \, dy = \int_0^1 x \, dx \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{x^{1/2}} = \int_0^1 x \, dx \cdot \frac{(x^{1/2})^4}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 x^3 \, dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

ESERCIZIO

Calcolare il seguente integrale doppio:

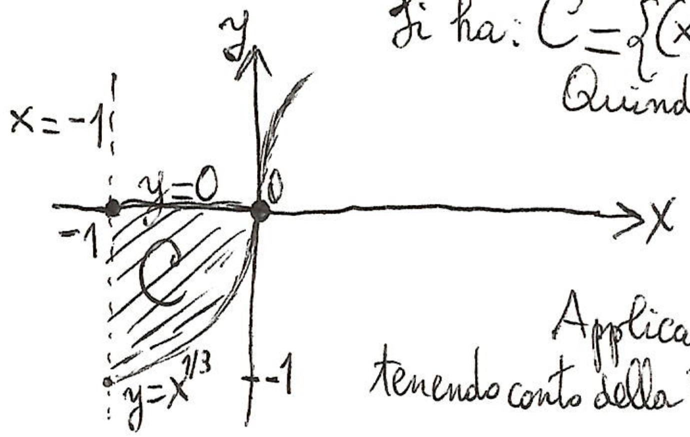
$$I = \iint_C x^2 y^2 \, dx \, dy$$

dove C è il dominio del piano cartesiano delimitato dall' asse x, dall' asse y, dalla retta $x = -1$ e dalla curva $y = x^{1/3}$ (ossia $y = \sqrt[3]{x}$)

Svolgimento: Disegniamo e parametrizziamo l' insieme C.

Si ha: $C = \{(x,y): -1 \le x \le 0, \ x^{1/3} \le y \le 0\}$.

Quindi C è un dominio normale rispetto all' asse x.



Applicando la formula di riduzione, si ha, tenendo conto della Formula Fondamentale del Calcolo Integrale:

$$I = \int_{-1}^{0} x^2 dx \int_{x^{1/3}}^{0} y^2 dy = \int_{-1}^{0} x^2 dx \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^{1/3}}^{y=0} =$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2 dx \cdot \frac{-(x^{1/3})^3}{3} = \frac{1}{3} \int_{-1}^{0} x^2 \cdot (-x) \, dx = -\frac{1}{3} \int_{-1}^{0} x^3 dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

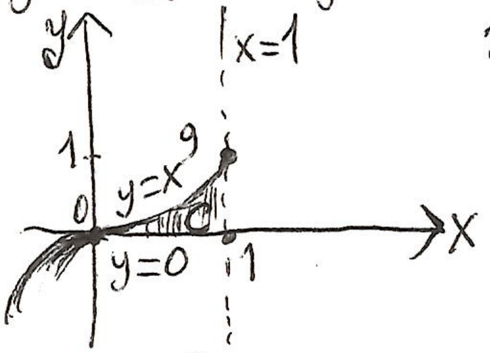
ESERCIZIO

Calcolare il seguente integrale doppio:

$$J = \iint_{C} x y \, dx \, dy$$

ove $C \subset \mathbb{R}^2$ è il dominio del piano cartesiano delimitato dagli assi coordinati, dalla retta $x = 1$ e dalla curva $y = x^9$.

Svolgimento: Disegniamo e parametrizziamo l'insieme C:



Si ha: $C = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^9\}$ quindi C è un dominio normale rispetto all'asse delle x. Applichiamo la formula di riduzione. Si ha:

$$J = \int_0^1 x \, dx \int_0^{x^9} y \, dy = \int_0^1 x \, dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x^9} = \int_0^1 x \cdot \frac{x^{18}}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{19} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^{20}}{20}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40}$$

(abbiamo applicato la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale)

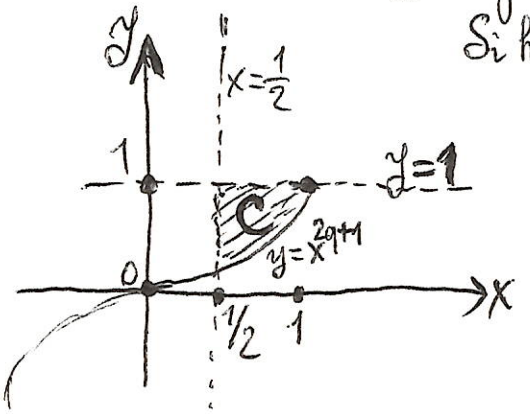
ESERCIZIO

Sia q un numero intero positivo fissato. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$J=\iint_C \frac{1}{x^{1/(2q)}}\,dx\,dy$$

, dove $C\subset\mathbb{R}^2$ è il sottinsieme del piano cartesiano delimitato dalla retta $x=\frac{1}{2}$, dalla retta $y=1$ e dalla curva $y=x^{2q+1}$

SVOLGIMENTO. Disegniamo e parametrizziamo l'insieme C.



Si ha: $C=\left\{(x,y):\ \frac{1}{2}\le x\le 1,\ x^{2q+1}\le y\le 1\right\}$.

Quindi C è un dominio normale rispetto all'asse x. Applicando la formula di riduzione e la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, si ha:

$$I=\int_{1/2}^{1} dx\cdot\frac{1}{x^{1/(2q)}}\int_{x^{2q+1}}^{1} dy=\int_{1/2}^{1}\frac{1}{x^{\frac{1}{2q}}}\left[y\right]_{x^{2q+1}}^{1}dx=$$

$$=\int_{1/2}^{1}\frac{1}{x^{\frac{1}{2q}}}\cdot\left(1-x^{2q+1}\right)dx=\int_{1/2}^{1}\frac{1}{x^{1/(2q)}}dx-\int_{1/2}^{1}x^{2q+1-\frac{1}{2q}}dx=$$

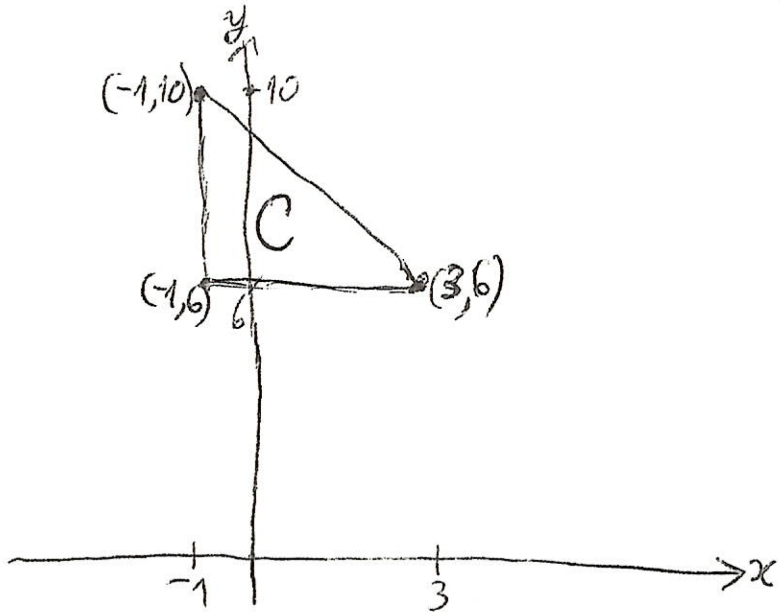
$$=\int_{1/2}^{1}x^{-\frac{1}{2q}}dx-\left[\frac{x^{2q+2-\frac{1}{2q}}}{2q+2-\frac{1}{2q}}\right]_{1/2}^{1}=\left[\frac{x^{1-\frac{1}{2q}}}{1-\frac{1}{2q}}\right]_{1/2}^{1}-\frac{\left(1-\frac{1}{2}^{2q+2-\frac{1}{2q}}\right)}{2q+2-\frac{1}{2q}}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}^{1-\frac{1}{2q}}}{1-\frac{1}{2q}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2q+2-\frac{1}{2q}}-1}{2q+2-\frac{1}{2q}}$$

[N.B.: $2q+1-\frac{1}{2q}>0$ e quindi $\neq -1$; inoltre $-\frac{1}{2q}\neq -1$, altrimenti $2q=1$, $q=\frac{1}{2}$, impossibile, perché q è INTERO POSITIVO. Quindi la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale si può applicare come abbiamo fatto]

ESERCIZIO SUGLI INTEGRALI DOPPI

Sia C il triangolo avente come vertici i punti $(-1,6)$, $(-1,10)$ e $(3,6)$. Calcolare $I=\iint_C x\,y\,dx\,dy$.



Per determinare la parametrizzazione del triangolo C, scriviamo l'equazione della retta passante per i punti $(-1,10)$ e $(3,6)$. Esistono formule che esprimono questo: ma, se non vogliamo ricordare nulla a memoria (anche se dietro le formule ci sono significati profondi, del tipo: similitudine di triangoli: VEDI DOPO!), procediamo così. L'equazione generica di una retta non verticale è $y=mx+q$ (dal disegno sappiamo già che la nostra retta NON È VERTICALE!). Imponiamo il passaggio per i punti $(-1,10)$ e $(3,6)$ e ci ricaviamo m e q. Si deve avere:

TRUCCO!

$$\begin{cases} 10 = m\cdot(-1)+q = -m+q \\ 6 = 3m+q \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro, si ottiene $4=-4m$, cioè $m=-1$. Quindi $10=-(-1)+q$, cioè $10=1+q$, da cui $q=9$. Quindi l'equazione della nostra retta è $y=-x+9$. Allora $C=\{(x,y): -1\le x\le 3,\ 6\le y\le -x+9\}$.

Pertanto otteniamo: $J=\iint_C xy\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} x\,dx \int_{6}^{-x+9} y\,dy.$

Applicando la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, otteniamo

$$J=\int_{-1}^{3} x\,dx \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{6}^{-x+9} = \int_{-1}^{3} x\cdot\left(\frac{(-x+9)^2}{2}-\frac{36}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3} x\cdot\left(x^2+81-18x-36\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\left(x^3+45x-18x^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{45}{2}x^2-\cancel{18}^{\,6}\,\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_{-1}^{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{81}{4}+\frac{405}{2}-162-\frac{1}{4}-\right.$$

$$\left.-\frac{45}{2}-6\right)=\frac{1}{2}\left(20+180-162-6\right)= \frac{1}{2}\cdot 32=16$$

$\boxed{\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=20}$ $\boxed{\frac{405}{2}-\frac{45}{2}=180}$

Quindi $J=16$.

Alla stessa conclusione si arriva se parametrizziamo l'insieme C rispetto all'asse y anziché rispetto all'asse x. L'equazione della retta passante per i punti $(-1,10)$ e $(3,6)$ è $y=-x+9$, che si scrive anche $x+y=9$, oppure $x=-y+9$. Quindi (vedi il disegno della pagina precedente) si ha:

$C=\{(x,y): 6\leq y\leq 10,\ -1\leq x\leq -y+9\}$, e pertanto

$$J=\int_{6}^{10} y\,dy\int_{-1}^{-y+9} x\,dx = \int_{6}^{10} y\,dy\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{-y+9} = \int_{6}^{10} y\left(\frac{(-y+9)^2}{2}-\frac{1}{2}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{6}^{10} y\left(y^2+81-18y-1\right)dy = \frac{1}{2}\int_{6}^{10}\left(y^3+80y-18y^2\right)dy = \ldots^{(*)}$$

Applicando la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, si ha

$$(*) = \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} + \cancel{80}^{40}\frac{y^2}{\cancel{2}} - \cancel{18}^{6}\frac{y^3}{\cancel{3}}\right]_6^{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{10000}{4} + 40\cdot 100 -\right.$$

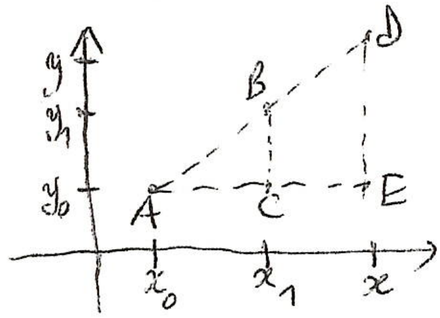
$$\left. - 6\cdot 1000 - \frac{6^4}{4} - 40\cdot 36 + 6^3\cdot 6\right) = \frac{1}{2}\left(2500 + 4000 - 6000 -\right.$$

$$\left. - \frac{\cancel{36}^{9}\cdot 36}{\cancel{4}} - 1440 + 36\cdot 36\right) = \frac{1}{2}\left(500 - 324 - 1440 + 1296\right) =$$

$= \frac{1}{2}\cdot 32 = 16$. Quindi si riottiene $J = 16$.

<u>APPENDICE</u>: Si può calcolare l'equazione della retta passante per i punti $(-1,10)$ e $(3,6)$ applicando la formula

$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, che si ricava dal fatto che i triangoli ABC e ADE in figura sono simili, e quindi i lati sono proporzionali, vale a dire



$\frac{\overline{ED}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$, ossia $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, da cui proprio $\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$.

(nel nostro caso tutte le quantità che entrano in gioco sono diverse da 0).

Nel nostro caso, $x_0 = -1$, $x_1 = 3$, $y_0 = 10$, $y_1 = 6$, e quindi si ottiene

$\frac{y-10}{6-10} = \frac{x-(-1)}{3-(-1)}$, cioè $\frac{y-10}{-4} = \frac{x+1}{4}$, da cui

$(y-10)\cdot 4 = (x+1)\cdot(-4)$, ossia $4y - 40 = -4x - 4$, cioè

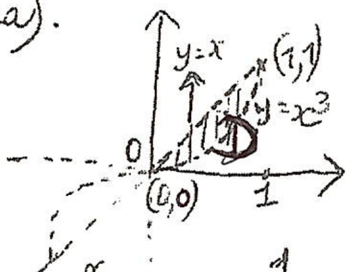
$y - 10 = -x - 1$, da cui $\boxed{y = -x + 9}$. Si ritrova quindi lo stesso risultato che era stato ottenuto precedentemente con un'altra tecnica.

ESERCIZIO. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$J=\iint_D x^p y^q \, dx\, dy, \qquad \text{con } p>2,\ q>2 \text{ fissati};$$

ove D è il dominio del piano cartesiano costituito da tutti quei punti (x,y) aventi ascissa e ordinata non negativa e delimitato dalla parabola $y=x^3$ e dalla semiretta $\underline{\underline{y=x \text{ con } x,y\geq 0}}$.

Innanzi tutto, notiamo che i punti $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$ sono le intersezioni della retta $y=x$ con la curva $y=x^3$, ma a noi interessano solamente i punti $(0,0)$ ed $(1,1)$ (vedi figura).



Quindi si ha $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leq x\leq 1,\ x^3\leq y\leq x\}$, e dunque

$$J=\int_0^1 x^p\,dx\int_{x^3}^{x} y^q\,dy=\int_0^1 x^p\,dx\left[\frac{y^{q+1}}{q+1}\right]_{x^3}^{x}=\frac{1}{q+1}\cdot$$

$$\cdot\int_0^1 x^p\left(x^{q+1}-x^{3(q+1)}\right)dx=\frac{1}{q+1}\cdot\left(\int_0^1 x^{p+q+1}\,dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^1 x^{p+3q+3}\,dx\right)=\frac{1}{q+1}\left[\frac{x^{p+q+2}}{p+q+2}\right]_0^1-\frac{1}{q+1}\left[\frac{x^{p+3q+4}}{p+3q+4}\right]_0^1=$$

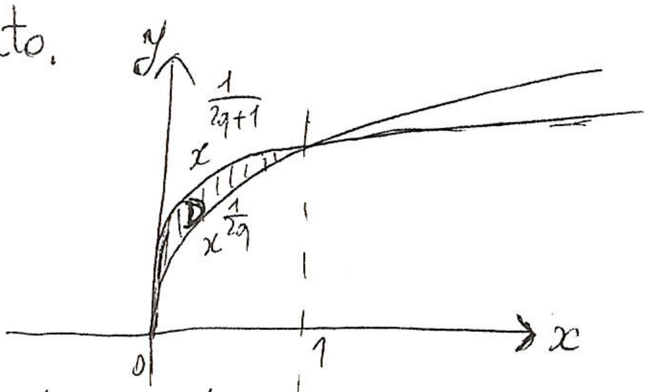
$$=\frac{1}{(q+1)\cdot(p+q+2)}-\frac{1}{(q+1)\cdot(p+3q+4)}.$$

ESERCIZIO 9

Calcolare il seguente integrale doppio:

$$J = \iint_D y \, dx \, dy \, ,$$

ove D è il dominio del piano cartesiano delimitato dalle rette $x=0$, $x=1$ e dalle curve $y = x^{\frac{1}{2q}}$ ed $y = x^{\frac{1}{2q+1}}$, e $q > 2$ è fissato.



SVOLGIMENTO. Notiamo innanzi tutto che, poiché $2q+1 > 2q$ ed $0 < x < 1$, allora $\frac{1}{2q+1} < \frac{1}{2q}$ ed $x^{\frac{1}{2q+1}} > x^{\frac{1}{2q}}$ per ogni $x \in]0,1[$.

Inoltre i punti $(0,0)$ ed $(1,1)$ sono i punti di intersezione dei grafici delle due curve $y = x^{\frac{1}{2q}}$, $y = x^{\frac{1}{2q+1}}$. Dunque $D = \left\{ (x,y) : 0 \le x \le 1, \, x^{\frac{1}{2q}} \le y \le x^{\frac{1}{2q+1}} \right\}$, e inoltre

$$J = \int_0^1 dx \int_{x^{1/(2q)}}^{x^{1/(2q+1)}} y \, dy = \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^{1/(2q)}}^{y=x^{1/(2q+1)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^{\frac{2}{2q+1}} - x^{\frac{1}{q}} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{\frac{2}{2q+1}+1}}{\frac{2}{2q+1}+1} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^{\frac{1}{q}+1}}{\frac{1}{q}+1} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2q+3}{2q+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{q+1}{q}} =$$

$$= \frac{2q+1}{2q+3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{q}{q+1} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2q+1}{2 \cdot (2q+3)} - \frac{q}{2(q+1)} =$$

$$= \frac{2q+1}{4q+6} - \frac{q}{2q+2} .$$

-11-

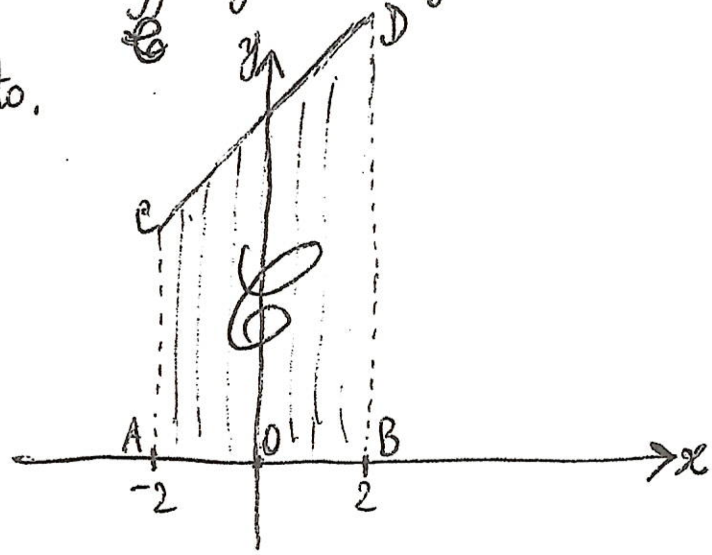
Esercizio. Sia $\mathscr{C}$ l'insieme del piano cartesiano delimitato dall'asse delle x, dalle rette $x=-2$, $x=2$ ed $y=x+9$.

a) Di quale figura geometrica si tratta?

b) Calcolare l'integrale doppio

$$J=\iint_{\mathscr{C}} xy \, dx\, dy$$

Svolgimento.



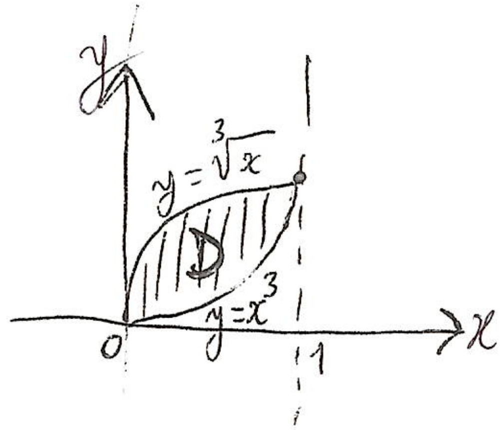
Consideriamo la retta $y=x+9$ (parallela alla bisettrice del I e III Quadrante ed inclinata di $45°$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ rispetto al semiasse positivo delle x). Per $x=0$, $y=9$, per $x=-2$, $y=7$; per $x=2$, $y=11$. Quindi, poiché $7>0$, la nostra figura geometrica sta tutta nel I e nel II Quadrante ed è un trapezio di vertici $A=(-2,0)$, $B=(2,0)$, $C=(-2,7)$, $D=(2,11)$. La sua parametrizzazione è
$$\mathscr{C}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ -2\leq x\leq 2, \ 0\leq y\leq x+9\right\}.$$ Pertanto si ha

$$J=\int_{-2}^{2} x\,dx\int_{0}^{x+9} y\,dy=\int_{-2}^{2} x\,dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x+9}=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x(x+9)^2\,dx$$ (in virtù della Formula Fondamentale del Calcolo Integrale) $=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\cdot(x^2+18x+81)\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^3+18x^2+81x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}+\overset{6}{\cancel{18}}\frac{x^3}{\cancel{3}}+81\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2^4}{4}+6\cdot2^3+81\cdot\frac{2^2}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{(-2)^4}{4}-6\cdot(-2)^3-81\cdot\frac{(-2)^2}{2}\right)=\frac{1}{2}(\cancel{4}+48+\cancel{162}-\cancel{4}+48-\cancel{162})=48.$$

ESERCIZIO. Sia $\mathcal{D}$ il dominio del piano cartesiano delimitato dalle rette $x=0$, $x=1$ e dalle parabole $y=x^3$ ed $y=\sqrt[3]{x}$. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$J=\iint_{\mathcal{D}} 3xy^2\,dx\,dy.$$



SVOLGIMENTO. Si ha:

$\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ x^3\le y\le \sqrt[3]{x}\}$

$$J=\int_0^1 x\,dx\int_{x^3}^{\sqrt[3]{x}} 3y^2\,dy=\int_0^1 x\,dx\,\left[y^3\right]_{x^3}^{\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\int_0^1 x(x-x^9)\,dx=\int_0^1 (x^2-x^{10})\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\left[\frac{x^{11}}{11}\right]_0^1=$$

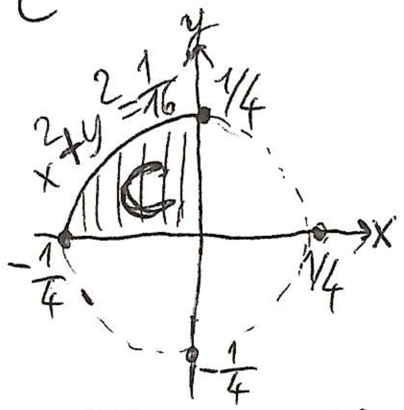
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{11}=\frac{11-3}{33}=\frac{8}{33}.$$

ESERCIZIO

Sia C il sottinsieme del II Quadrante del piano cartesiano delimitato dai due assi coordinati e dalla circonferenza $x^2+y^2=\frac{1}{16}$. Calcolare l'integrale doppio

$$I=\iint_C (x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}\,dx\,dy$$

SVOLGIMENTO



Disegniamo e parametrizziamo l'insieme C.

Siccome c'è un arco di circonferenza, conviene utilizzare le coordinate polari.

Notiamo che $x^2+y^2=\frac{1}{16}$ è l'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$ $(x^2+y^2=R^2 \ldots)$; quindi, nell'insieme C in figura, ρ è compreso fra 0 e $\frac{1}{4}$ (raggio della circonferenza) (ρ è la distanza di un generico punto di C dall'origine).

Inoltre, poiché siamo nel 2° Quadrante, l'angolo ϑ varia tra $\frac{\pi}{2}$ e π.

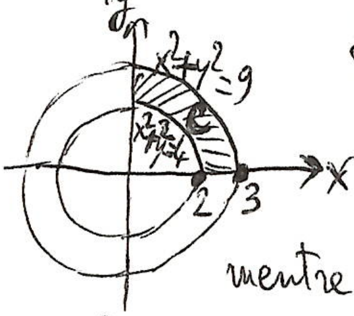
Quindi $C=\left\{(\rho,\vartheta): 0\le\rho\le\frac{1}{4},\ \frac{\pi}{2}\le\vartheta\le\pi\right\}$, che è un dominio normale (sia rispetto a ρ sia rispetto a ϑ). Usando le formule di riduzione e la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, tenendo conto che $x^2+y^2=\rho^2$ e moltiplicando per lo Jacobiano (che è ρ), si ha:

$$I=\int_0^{1/4}(\rho^2)^{\frac{5}{2}}\cdot\rho\,d\rho\int_{\pi/2}^{\pi}d\vartheta=\int_0^{1/4}\rho^{\cancel{2}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}}\cdot\rho\,d\rho\cdot\left[\vartheta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\left(\int_0^{1/4}\rho^6\,d\rho\right)\cdot\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{\rho^7}{7}\right]_0^{1/4}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(1/4)^7}{7}=\frac{1}{14}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7=\frac{\pi}{14\cdot 4^7}$$

ESERCIZIO -14-

Sia C il sottinsieme del I Quadrante del piano cartesiano costituito dal pezzo di corona circolare delimitato dalle due circonferenze $x^2+y^2=4$ ed $x^2+y^2=9$. Calcolare l'integrale doppio $J=\iint_C (x^2+y^2)^{-\frac{7}{2}}\,dx\,dy$



Svolgimento: Disegniamo e parametrizziamo l'insieme C. Poiché ci sono due archi di circonferenza, usiamo le coordinate polari. Notiamo che $x^2+y^2=4$ è l'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{4}=2$, mentre $x^2+y^2=9$ è l'equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{9}=3$ $(x^2+y^2=R^2 \dots)$. Quindi, nell'insieme C in figura, ρ è compreso fra 2 e 3 (raggi delle due circonferenze) (ρ è la distanza di un generico punto di C dall'origine). Inoltre, siccome siamo nel 1° Quadrante, l'angolo ϑ varia tra 0 e $\pi/2$. Quindi $C=\left\{(\rho,\vartheta):\ 2\le\rho\le 3,\ 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}\right\}$: C è un dominio normale (sia rispetto a ρ sia rispetto a ϑ). Usando le formule di riduzione e la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, tenendo conto che $x^2+y^2=\rho^2$ e moltiplicando per lo Jacobiano (che è ρ), si ottiene

$$J=\int_2^3 (\rho^2)^{-\frac{7}{2}}\cdot\rho\,d\rho\cdot\int_0^{\pi/2} d\vartheta=\int_2^3 \rho^{-7}\cdot\rho\,d\rho\cdot\left[\vartheta\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}\cdot\int_2^3\rho^{-6}\,d\rho=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{\rho^{-5}}{-5}\right]_2^3=-\frac{\pi}{10}\left(3^{-5}-2^{-5}\right)=\frac{\pi}{10}\left(2^{-5}-3^{-5}\right)$$

(N.B.: Osserviamo che $2^{-5}>3^{-5}$: infatti $2^{-5}>3^{-5}$ se e solo se $\frac{1}{2^5}>\frac{1}{3^5}$ se e solo se (passando ai reciproci) $2^5<3^5$, il che è vero). Quindi il valore I dell'integrale è positivo. Era da aspettarsi, visto che la funzione integranda è positiva. Se avessimo trovato $I<0$, avremmo certamente commesso errori di calcolo da qualche parte.

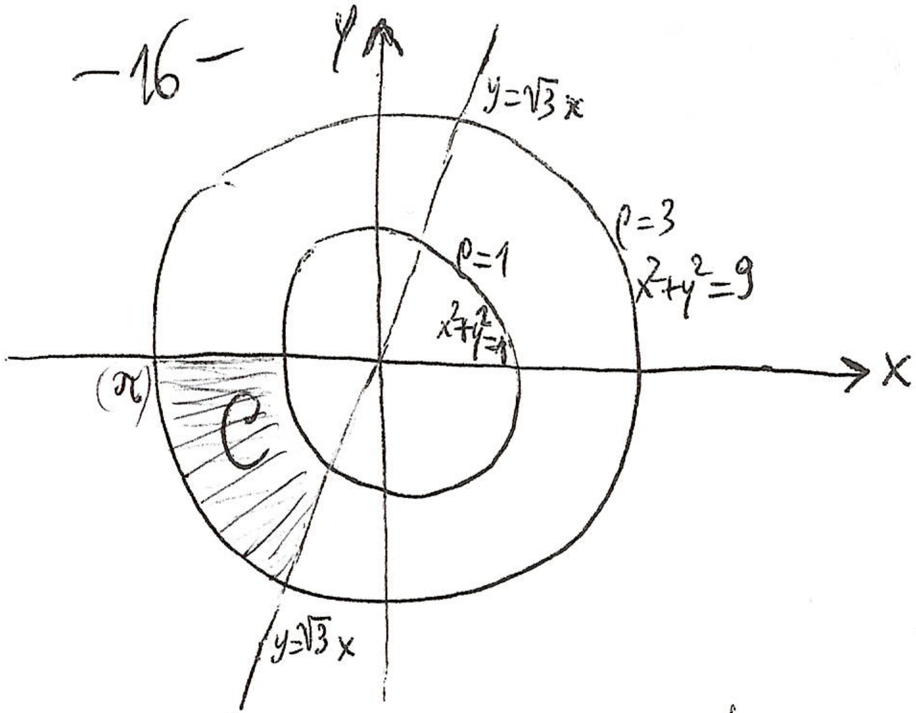
Dagli ESERCIZI TEST PER ALLENARSI

Esercizio sugli integrali doppi

Sia C il sottinsieme del III Quadrante delimitato dalle rette $y=0$ ed $y=\sqrt{3}\,x$ e dalle circonferenze $x^2+y^2=1$ ed $x^2+y^2=9$. Calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_C (x^2+y^2)^{\frac{11}{4}}\, dx\, dy$$

1) Disegniamo l'insieme C. La circonferenza $x^2+y^2=1$ è quella di centro l'origine e raggio 1 (come visto, la distanza di un generico punto (x,y) di $\mathbb{R}^2$ dall'origine è $\sqrt{x^2+y^2}$, quindi $x^2+y^2=1$ se e solo se $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1}=1$). La circonferenza $x^2+y^2=9$ è quella di centro l'origine e raggio 3 (perché $x^2+y^2=9$ se e solo se $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{9}=3$). Siccome $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, allora la circonferenza $x^2+y^2=1$ si scrive, in coordinate polari, $\rho=1$, mentre l'espressione in coordinate polari della circonferenza $x^2+y^2=9$ è $\rho=3$. Dovremo prendere quindi i punti del piano cartesiano per i quali ρ è compreso tra 1 e 3.



L'insieme C è quindi un pezzo di corona circolare compresa fra le circonferenze di centro l'origine e di raggio 1 e 3 (ρ va da 1 a 3).

Ora, dove varia ϑ? L'insieme C è delimitato dall'asse x e dalla retta $y=\sqrt{3}\,x$ e si trova sul III Quadrante, dove $x \leq 0$ ed $y \leq 0$: quindi devo scegliere il semiasse negativo delle x e non quello positivo, ed inoltre, della retta $y=\sqrt{3}\,x$, quella semiretta che è orientata VERSO IL BASSO e non verso l'alto. Al semiasse negativo delle x corrisponde l'angolo di 180°, cioè π (perché si parte dal semiasse positivo delle x).

Vediamo quale angolo corrisponde alla semiretta della retta $y=\sqrt{3}\,x$ orientata verso il basso.

Sappiamo che il coefficiente angolare di una retta $\boxed{y = mx}$ è la tangente goniometrica dell'angolo φ formato dal semiasse positivo delle x e della semiretta $y = mx$ orientata verso l'alto se φ è un angolo compreso fra 0 e π, e verso il basso se φ è un angolo compreso fra π e 2π.

Ma, siccome nel testo dell'esercizio si chiede che C stia dentro il III Quadrante e non nel I Quadrante, allora φ dev'essere compreso fra π e $\frac{3\pi}{2}$ (e non tra 0 e $\frac{\pi}{2}$).

Questa premessa è importantissima, per quello che viene in seguito.

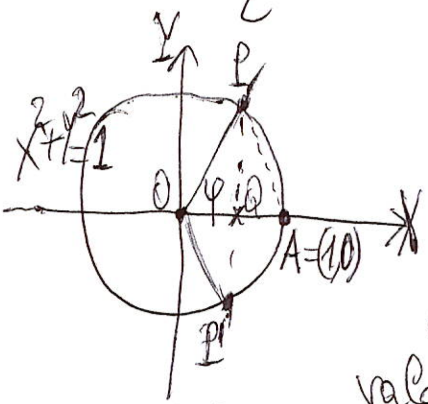
ESERCIZIO NELL'ESERCIZIO

Ciò premesso, visto che la retta data è $y = \sqrt{3}\,x$, risolviamo l'equazione trigonometrica $\boxed{tg\,\varphi = \sqrt{3}}$.

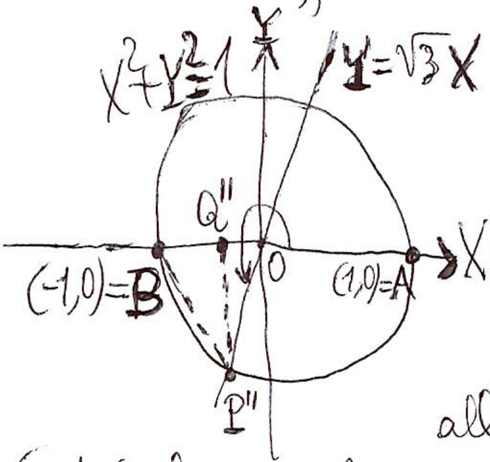
(in $[0, 2\pi]$)

Poniamo $X = \cos\varphi$, $Y = \sin\varphi$, e - visto che siamo sulla circonferenza trigonometrica, poniamo $X^2 + Y^2 = 1$. Quindi la nostra equazione si scrive $\frac{Y}{X} = \sqrt{3}$, ossia $Y = \sqrt{3}\,X$. Abbiamo $\begin{cases} Y = \sqrt{3}\,X \\ \boxed{X^2 + Y^2 = 1} \end{cases}$

Sostituendo il valore $\sqrt{3}\,X$ al posto di Y in si ha $X^2 + (\sqrt{3}\,X)^2 = 1$, cioè $X^2 + 3X^2 = 1$, $4X^2 = 1$, $X^2 = \frac{1}{4}$, $X = \pm\frac{1}{2}$. Consideriamo prima il caso $X = \frac{1}{2}$.



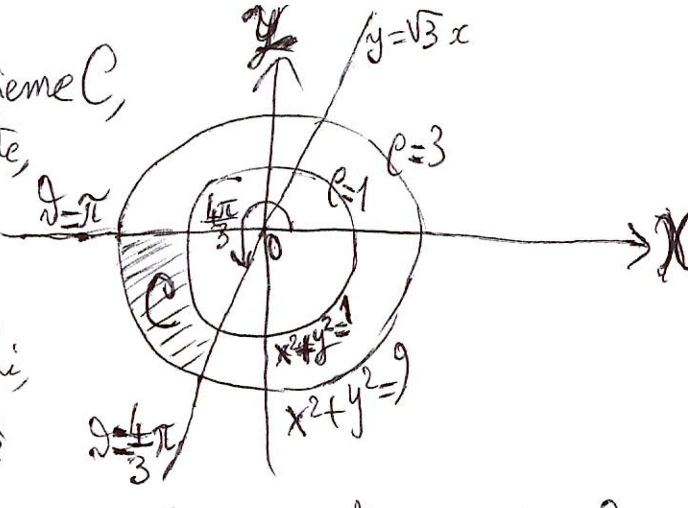
$X = \frac{1}{2}$ vuol dire $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. Osserviamo che, da 0 a 2π, ci sono <u>due</u> valori φ per i quali $\cos\varphi = \frac{1}{2}$: uno nel 1° Quadrante e l'altro nel 4° Quadrante. Ma sappiamo che $tg\,\varphi = \sqrt{3}$, quindi $tg\,\varphi$ è positiva: allora il valore che si trova nel 4° Quadrante va scartato, perché nel 4° Quadrante X è positivo, Y è negativo (cioè il **coseno** è positivo e il seno è negativo), e quindi la tangente è <u>negativa</u>. Va preso invece <u>soltanto</u> il valore del 1° Quadrante, dove X (il coseno) ed Y (il seno) sono positivi e quindi anche la tangente è positiva. Dunque, $\overline{OP} = 1$ (raggio della circonferenza goniometrica), $\overline{OQ} = \frac{1}{2}$ (perché $X = \frac{1}{2}$ ed $OQ = X$, OQ è la coordinata X del punto $P = (\cos\varphi, \sin\varphi)$). Inoltre, $\overline{OA} = 1$ (raggio della circonferenza goniometrica). Poiché $\overline{OQ} = \frac{1}{2}$, per simmetria si ha: $\overline{QA} = \frac{1}{2}$, $\boxed{\overline{PA} = 1}$. Dunque, il triangolo OAP è <u>equilatero</u> (tutti i 3 lati hanno lunghezza 1), e allora l'angolo $P\hat{O}A$, cioè l'angolo φ, misura $\frac{180°}{3} = 60° = \frac{\pi}{3}$ radianti) Quindi, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, al caso $X = \frac{1}{2}$ corrisponde la soluzione $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Osserviamo però che $\frac{\pi}{3}$ è sul 1° Quadrante, e quindi, <u>NEL</u> NOSTRO <u>ESERCIZIO</u>, $\frac{\pi}{3}$ è da scartare, mentre invece se consideriamo l'esercizio "Risolvere l'equazione $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$" come esercizio A PARTE a sé stante, la soluzione $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (in $[0, 2\pi]$) è "buona".



Ora veniamo al caso $X = -\frac{1}{2}$. Allora il coseno di φ è negativo ($X = \cos\varphi$, $Y = \sin\varphi$). Poiché $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} > 0$, allora anche il seno di φ deve essere – in questo caso – negativo, e allora ci troviamo nel 3° Quadrante (ed è il caso che ci interessa NEL NOSTRO ESERCIZIO DATO DI PARTENZA). Quindi, nella figura, $X = OQ'' = -\frac{1}{2}$ (ove il segmento OQ'' è percorso da destra a sinistra). Osserviamo che $\overline{OP''} = 1$, $\overline{OB} = -1$ (da destra a sinistra), $\overline{BO} = 1$ (da sinistra a destra). Per simmetria, procedendo analogamente come nel caso precedente ($X = \frac{1}{2}$, nella pagina precedente), abbiamo $\overline{BP''} = 1$, e allora il triangolo OBP'' è equilatero, e allora l'angolo $B\hat{O}P''$ misura $60°$, cioè $\frac{\pi}{3}$ radianti. Allora la misura dell'angolo $A\hat{O}P''$ (che è l'angolo φ che si trova nel 3° Quadrante e tale che $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$) è uguale alla somma delle misure degli angoli $A\hat{O}B$ ($180° = \pi$) e $B\hat{O}P''$ ($60° = \frac{\pi}{3}$), cioè $240° = \frac{4}{3}\pi$ (che è anche la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AP''}$ percorso in senso antiorario da A a P'', che è la somma della lunghezza dell' arco $\overset{\frown}{AB}$ percorso in senso antiorario, cioè 180° (π), metà circonferenza, e della lunghezza dell' arco BP'' $\left(\frac{\pi}{3}\right)$).

Osserviamo anche che, una volta ottenuto che $tg\,\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, il $\underset{\text{(la soluzione)}}{\underline{\text{valore}}}$ $\frac{4}{3}\pi = 240°$ nell' equazione $tg\,\varphi=\sqrt{3}$ si può ricavare anche usando il fatto che la funzione tangente trigonometrica è <u>periodica</u> di periodo π: infatti, per questa periodicità, si ha
$tg\left(\frac{4}{3}\pi\right) = tg\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Dunque, l' equazione $\boxed{tg\,\varphi=\sqrt{3}}$, in $[0, 2\pi]$, ha <u>ESATTAMENTE</u> <u>DUE SOLUZIONI</u>: $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$ ($=60°$), $\varphi_2=\frac{4}{3}\pi$ ($=240°$).



Quindi, tornando all' insieme C, poiché siamo nel 3° Quadrante, ϑ varia da π a $\frac{4}{3}\pi$.
Inoltre, abbiamo visto che ρ varia tra 1 e 3. Quindi,
2) parametrizziamo C, che è un <u>dominio normale</u>, sia rispetto a ρ che rispetto a ϑ.
Si ha:

$$C = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \rho \le 3,\ \pi \le \vartheta \le \frac{4}{3}\pi \right\}$$

3) Calcoliamo ora l'integrale doppio, applicando la formula di riduzione e moltiplicando per il fattore "magico" ρ, tenendo conto che $x^2+y^2=\rho^2$. Si ha:

$$I = \iint_C (x^2+y^2)^{\frac{11}{4}}\, dx\, dy = \int_1^3 (\rho^2)^{\frac{11}{4}} \cdot \rho\, d\rho \int_\pi^{\frac{4}{3}\pi} d\vartheta$$

$$\begin{pmatrix}\text{proprietà}\\ \text{delle}\\ \text{potenze}\end{pmatrix} = \int_1^3 \rho^{2\cdot\frac{11}{4}+1}\, d\rho \int_\pi^{\frac{4}{3}\pi} 1 \cdot d\vartheta = \int_1^3 \rho^{\frac{13}{2}} d\rho \cdot [\vartheta]_\pi^{\frac{4}{3}\pi} = \ldots$$

(si applica la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale)

$$\ldots = \left[\frac{\rho^{\frac{13}{2}+1}}{\frac{13}{2}+1} \right]_1^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi - \pi \right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left[\frac{\rho^{\frac{15}{2}}}{\frac{15}{2}} \right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2}{15} \cdot \left(3^{\frac{15}{2}} - 1\right) = \frac{2}{45}\pi \cdot \left(3^{\frac{15}{2}} - 1\right)$$

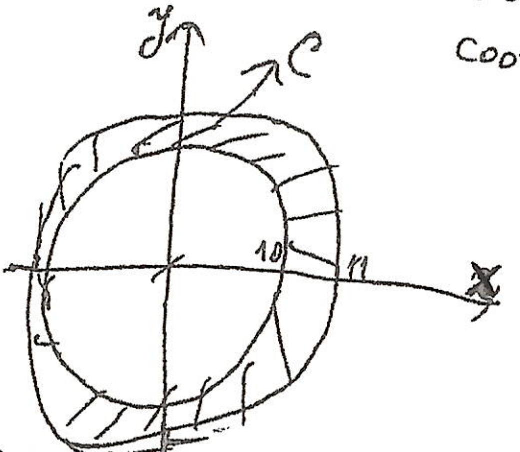
ESERCIZIO. Sia C la corona circolare costituita dai due cerchi del piano cartesiano di centro l'origine e di raggi 10 e 11.

Calcolare il seguente integrale doppio:

$$J = \iint_C \frac{x}{(x^2+y^2)^{q+1}}\,dx\,dy \quad , \text{con } q > 2 \text{ fissato}$$

(Suggerimento: Passare dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari e moltiplicare per lo Jacobiano della trasformazione ..., cioè per ρ)

SVOLGIMENTO. Usando la rappresentazione in coordinate polari, si ha



$$C = \{(\rho, \vartheta) : 10 \le \rho \le 11,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi\},$$

$$J = \int_{10}^{11} \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho\cos\vartheta}{(\rho^2)^{q+1}}\,d\vartheta =$$

$$= \int_{10}^{11} \frac{\rho^2}{\rho^{2q+2}}\,d\rho \int_0^{2\pi} \cos\vartheta\,d\vartheta =$$

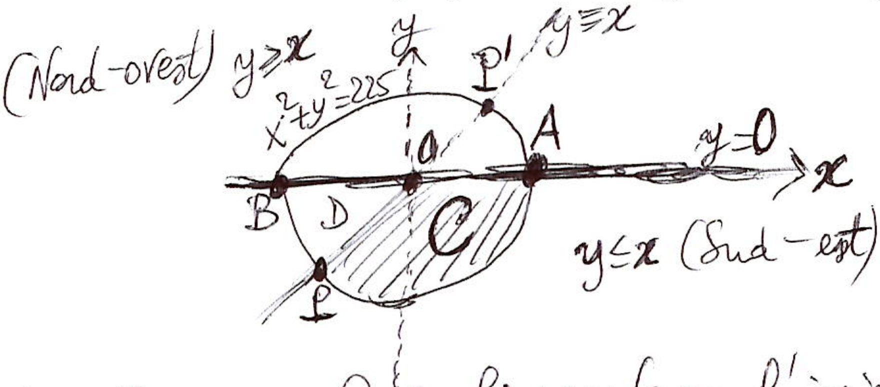
$$= \int_{10}^{11} \rho^{-2q}\,d\rho\,\Big[\sin\vartheta\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= \int_{10}^{11} \rho^{-2q}\,d\rho\,\underbrace{(\sin 2\pi - \sin 0)}_{0-0=0} = 0.$$

N.B.: $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$

$x^2+y^2 = \rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta =$
$= \rho^2(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = \rho^2.$

Esercizio: Calcolare $J = \iint_C \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/15}}\,dx\,dy$, dove C è il sottoinsieme del piano cartesiano delimitato dall'asse delle x (cioè dalla retta $y=0$), dalla semicirconferenza $x^2+y^2=225$ costituita dai punti che hanno ordinata $y \leq 0$ e dalla retta $y=x$, ed avente inoltre la proprietà che $y \leq x$ per ogni $(x,y) \in C$.

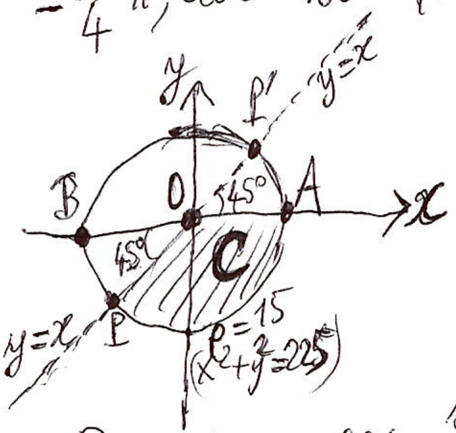


Si sceglie l'insieme C in figura (e non l'insieme D) perché, sul testo dell'esercizio, è stato richiesto che $y \leq x$, cioè l'ordinata è $\leq$ dell'ascissa: e questo è possibile (solamente) a "sud-est" della retta $y=x$, che è la bisettrice del 1° e del **3°** Quadrante.

Consideriamo ora l'insieme C. Visto che c'è la circonferenza $x^2+y^2=225$, di centro l'origine e di raggio $\sqrt{225}=15$, usiamo le coordinate POLARI. Intanto, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ varia tra 0 e 15. Alla retta $y=0$ corrisponde l'asse x, ma nel nostro caso, il semiasse positivo o quello negativo? Notiamo che l'insieme C sta a "sud-est" rispetto alla retta $y=x$, e dalla figura si vede che i punti di "sud-est" sono tali che $x \geq 0$, quindi prenderemo il semiasse <u>POSITIVO</u> delle x, a cui corrisponde $\vartheta=0$ (o $\vartheta=2\pi$). Alla retta $y=x$ (visto che i punti di C sono tali che $y \leq 0$) corrisponde l'angolo $A\hat{O}P$ (l'arco $\overset{\frown}{AP}$ in senso antiorario, cioè $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BP} = \pi + \frac{\pi}{4}$

$225° = 180° + 45°$

$= \frac{5}{4}\pi$, cioè $180° + 45° = 225°$, ossia $A\hat{O}P = A\hat{O}B + B\hat{O}P$. Ma perché l'angolo $B\hat{O}P$ misura $45°$? A pag. 53 di "Integrali doppi: testo adottato", durante lo svolgimento dell'Esercizio 3, abbiamo visto sostanzialmente che l'angolo $A\hat{O}P'$ misura $45°$; quindi, per simmetria, anche l'angolo $B\hat{O}P$ misura $45°$.



Pertanto, nell'insieme C, alla retta $y = x$ (semiretta contenuta nel 3° Quadrante) corrisponde l'angolo $A\hat{O}P$ (con $\widehat{AP}$ in senso antiorario, quindi nella figura è il cammino "lungo" da A a P) di $\frac{5}{4}\pi$ ($= 225°$). Quindi ϑ varia tra $\frac{5}{4}\pi$ e 2π (dobbiamo andare da P ad A in senso "antiorario"), e si ha

$$C = \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 \leq \rho \leq 15,\ \frac{5}{4}\pi \leq \vartheta \leq 2\pi \right\}.$$

 -25-

Pertanto l'insieme C, con le coordinate polari, si parametrizza nel seguente modo:

$$C=\left\{(\rho,\vartheta): 0\leq\rho\leq 15,\ \frac{5}{4}\pi\leq\vartheta\leq 2\pi\right\}.$$

Quindi, tenendo conto che $x^2+y^2=\rho^2$, si ha:

$$J=\iint_C \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/15}}\,dx\,dy=\int_0^{15}\frac{1}{(\rho^2)^{\frac{1}{15}}}\cdot\rho\,d\rho\cdot\int_{\frac{5}{4}\pi}^{2\pi}d\vartheta=$$

(Jacobiano della trasformazione $\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta\end{cases}$)

$$=\int_0^{15}\frac{1}{\rho^{\frac{2}{15}}}\cdot\rho\,d\rho\cdot\Big[\vartheta\Big]_{\frac{5}{4}\pi}^{2\pi}=\int_0^{15}\rho^{1-\frac{2}{15}}\,d\rho\cdot\left(2\pi-\frac{5}{4}\pi\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\pi\int_0^{15}\rho^{\frac{13}{15}}\,d\rho=\frac{3}{4}\pi\left[\rho^{\frac{13}{15}+1}\right]_0^{15}\cdot\frac{15}{28}=\frac{45}{112}\pi\left[\rho^{\frac{28}{15}}\right]_0^{15}=$$

$$=\frac{45}{112}\cdot 15^{\frac{28}{15}}\cdot\pi \qquad \left(\text{N.B.: } \frac{13}{15}+1=\frac{13}{15}+\frac{15}{15}=\frac{28}{15}\right)$$

(N.B.: $\displaystyle\int_0^{15}\rho^{\frac{13}{15}}\,d\rho=\left[\frac{\rho^{\frac{13}{15}+1}}{\frac{13}{15}+1}\right]_0^{15}=\left[\rho^{\frac{28}{15}}\right]_0^{15}\cdot\frac{1}{\frac{28}{15}}=$

$\displaystyle=\left[\rho^{\frac{28}{15}}\right]_0^{15}\cdot\frac{15}{28}$; inoltre $\displaystyle\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{28}=\frac{45}{112}$).

Il risultato finale è quindi $\boxed{J=\frac{45}{112}\cdot 15^{\frac{28}{15}}\cdot\pi}$

(lo lasciamo così, in questa espressione).